מערכות משוואות לינאריות

מערכות משוואות לינאריות (ממ"ל)

הגדרות יסוד

משוואה לינארית

משוואה לינארית היא משוואה בצורה הכללית:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

כאשר $a_1, a_2, \ldots, a_n$ הם **מקדמים**, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ הם **נעלמים**, ו-b הוא **האיבר החופשי**.

דוגמאות:

- $2x = 4$ - משוואה לינארית עם נעלם אחד, פתרונה: $x = 2$
- $3x + 4y = 1$ - משוואה לינארית עם שני נעלמים, פתרונה: $x = \frac{1-4y}{3},\ y \in \mathbb{R}$

Definition

פתרון של משוואה לינארית - סדרת מספרים $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ שהצבתה במקום הנעלמים הופכת את המשוואה לזהות.

הפתרון הכללי - אוסף כל הפתרונות של המשוואה. למשוואה לינארית יכול להיות פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

מערכת משוואות לינאריות

הצורה הכללית של מערכת עם m משוואות ו-n נעלמים:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definition

- **פתרון של מערכת** - סדרת מספרים $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ שהצבתה הופכת כל אחת מהמשוואות לזהות.

- **מערכת עקבית** - מערכת שיש לה לפחות פתרון אחד.
- **מערכות שקולות** - שתי מערכות שיש להן אותו פתרון כללי.

סוגי פתרונות אפשריים:

1. **פתרון יחיד** - מערכת עקבית עם פתרון אחד בלבד
2. **אינסוף פתרונות** - מערכת עקבית עם פרמטרים חופשיים
3. **אין פתרון** - מערכת לא עקבית (סתירה)

מטריצה מורחבת

הצגה מתומצתת של מערכת משוואות כטבלה הכוללת את המקדמים ואת האיברים החופשיים.

דוגמה למערכת:

$$\begin{cases} x+2y-4=-4 \\ 5x+11y-21=-22 \\ 3x-2y+3=11 \end{cases}$$

המטריצה המורחבת שלה:

מקדם x	מקדם y	מקדם	איבר חופשי
1	2	-4	-4
5	11	-21	-22
3	-2	3	11

מונחים במטריצה

מונח	הגדרה
איבר מוביל	האיבר הראשון משמאל בשורה שאינו אפס
עמודה מובילה	עמודה שבה נמצא איבר מוביל
משתנה תלוי (מוביל)	משתנה המתאים לעמודה המובילה
משתנה חופשי	כל משתנה שאינו תלוי - יקבל ערכים מ-$\mathbb{R}$

בפתרון כללי יש לבטא כל **משתנה תלוי** באמצעות ה**משתנים החופשיים**.

צורות מטריצה

מטריצה מדורגת (REF)

Definition

מטריצה נקראת **מדורגת** אם:

1. כל שורות האפסים (אם קיימות) נמצאות בתחתית המטריצה
2. האיבר המוביל בכל שורה נמצא **משמאל** לאיבר המוביל של השורה הקודמת (המדרגות יורדות)

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה קנונית (RREF)

Definition

מטריצה A נקראת **קנונית** אם:

1. A מדורגת
2. כל איבר מוביל שווה ל-1
3. כל איבר מוביל הוא היחיד בעמודתו ששונה מאפס

Theorem

כל מטריצה A ניתן לדרג לקבלת **מטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה**.

שיטות פתרון

פעולות אלמנטריות על שורות

ניתן לבצע את הפעולות הבאות **מבלי לשנות את הפתרון הכללי**:

1. כפל שורה בסקלר שונה מאפס: $k \cdot R_i \to R_i,\ k \neq 0$
2. החלפת שתי שורות: $R_i \leftrightarrow R_j$
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת: $k \cdot R_i + R_j \to R_j$
4. צורה כללית: $k_1 \cdot R_i + k_2 \cdot R_j \to R_j,\ k_2 \neq 0$

שיטת גאוס

המטרה: להביא את המטריצה המורחבת לצורה מדורגת ואז לפתור בחזרה.

שלבים:

1. כתוב את המטריצה המורחבת
2. עבור שורה שורה - אפס את כל האיברים **מתחת** לאיבר המוביל בכל עמודה
3. לאחר קבלת מטריצה מדורגת - פתור מהשורה האחרונה כלפי מעלה

Example

מערכת:

$$\begin{cases} x + 2y + \ = 3 \\ 2x + 5y - \ = -4 \\ 3x - 2y - \ = 5 \end{cases}$$

שלב 1 - מטריצה מורחבת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 5 & -1 & | & -4 \\ 3 & -2 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

שלב 2 - פעולות אלמנטריות:

$$-2R_1 + R_2 \to R_2, \quad -3R_1 + R_3 \to R_3, \quad 8R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -3 & | & -10 \\ 0 & 0 & -28 & | & -84 \end{pmatrix}$$

שלב 3 - פתרון לאחור:

$$= 3, \quad y = -1, \quad x = 2$$

פתרון יחיד: $(2,\ -1,\ 3)$

זיהוי סוג הפתרון לאחר דירוג

מצב	מסקנה
קיימת שורת סתירה $(0\ 0\ \dots\ 0\ \ b \neq 0)$	**אין פתרון**
אין שורת סתירה + מס' איברים מובילים = מס' נעלמים	**פתרון יחיד**
אין שורת סתירה + מס' איברים מובילים < מס' נעלמים	**אינסוף פתרונות** - יש לכתוב פתרון כללי

ממ"ל עם פרמטר

כאשר מערכת מכילה פרמטר (כמו k), השיטה זהה לגאוס רגיל - אבל בסוף מקבלים ביטויים עם k שיש לנתח לפי הערכים המיוחדים שמאפסים את האלכסון.

Example

תרגיל: עבור אילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד / אינסוף פתרונות / אין פתרון?

$$\begin{cases} kx + y + \ = 1 \\ x + ky + \ = k \\ x + y + k = k^2 \end{cases}$$

לאחר דירוג מתקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & | & k^2 \\ 0 & k-1 & -(k-1) & | & -k(k-1) \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1) & | & -(k-1)(k+1)^2 \end{pmatrix}$$

הערכים הקריטיים הם $k = 1$ ו-$k = -2$.

מקרה $k = 1$ - אינסוף פתרונות:
שתי שורות אפסים - נציב $y = t, \ =$, ונקבל $x = 1 - t -$.
פתרון כללי: $(1 - t -\ ,\ t,\ )$

מקרה $k = -2$ - אין פתרון:
שורת סתירה $(0\ 0\ 0 \mid 3)$ - אין פתרון.

מקרה $k \neq 1$ וגם $k \neq -2$ - פתרון יחיד.

מערכת הומוגנית

Definition

מערכת שבה כל האיברים החופשיים שווים לאפס:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

- מערכת הומוגנית **תמיד עקבית**, כי תמיד קיים ה**פתרון הטריוויאלי**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

מקרים אפשריים:

1. פתרון יחיד - הפתרון הטריוויאלי $(0, 0, \ldots, 0)$
2. אינסוף פתרונות

הצגת ממ"ל באמצעות כפל מטריצות

כל מערכת משוואות לינארית ניתן לכתוב בצורה קומפקטית $A \cdot \ = b$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Warning

- **שורת סתירה** $(0,\ 0,\ \ldots,\ 0 \mid b \neq 0)$ - מורה שאין פתרון למערכת
- **שורת אפסים מלאה** $(0,\ 0,\ \ldots,\ 0 \mid 0)$ - מורה שיש אינסוף פתרונות, יש לכתוב פתרון כללי עם פרמטר חופשי